23/4/2018

① **Άσκηση** Έστω $\varphi: G_1 \to G_2$ ομομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι αν $\alpha \in G_1$ και $ord(\alpha) = n$, τότε:

$$\boxed{ord(\varphi(\alpha)) \mid n}$$

② **Άσκηση** Έστω $\varphi: G_1 \to G_2$ ισομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι: αν $\alpha \in G_1$, τότε $ord(\alpha) = ord(\varphi(\alpha))$!

① **Λύση:** $\alpha^n = 1 \Rightarrow \varphi(\alpha^n) = \varphi(1) = 1 = e_{G_2} \Rightarrow$ ($1 \in G_1$)

$\Rightarrow (\varphi(\alpha))^n = e_{G_2} \Rightarrow \boxed{ord(\varphi(\alpha)) \mid n}$

② **Λύση:** Έστω ότι $ord(\alpha) = n < \infty$. Τότε:

$\rightarrow ord(\alpha) = n \Rightarrow ord(\varphi(\alpha)) \mid n \Rightarrow ord(\varphi(\alpha)) = m < \infty$.

$\Rightarrow \boxed{m \mid n}$

• Θεωρώ $\varphi(\alpha) \in G_2$, με $ord(\varphi(\alpha)) = m$ και έστω η αντίστροφη απεικόνιση $\varphi^{-1}: G_2 \to G_1$. Έχω, λοιπόν, ότι:

$ord(\varphi^{-1}(\varphi(\alpha))) \mid ord(\varphi(\alpha)) \Rightarrow ord(\alpha) \mid ord(\varphi(\alpha)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{n \mid m}$

• Συνεπώς $n = m \Rightarrow \boxed{ord(\alpha) = ord(\varphi(\alpha))}$

• Έστω ότι η τάξη του α είναι άπειρη, τότε ισχυριζόμαστε ότι και η τάξη του $\varphi(\alpha)$ είναι άπειρη.

• Έστω ότι το $\varphi(\alpha)$ έχει πεπερασμένη τάξη, δηλαδή:

$$ord(\varphi(\alpha)) = m \text{, για κάποιο φυσικό αριθμό } m.$$

$$\Longrightarrow ord(\varphi^{-1}(\varphi(\alpha))) = ord(\varphi(\alpha)) = m \Rightarrow \boxed{ord(\alpha) = m}$$

↳ Άτοπο

• Άρα η τάξη του $\varphi(\alpha)$ είναι άπειρη!!!

• Συνεπώς $\boxed{m = n}$

▶ **Άσκηση** Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς από: $\mathbb{Z}_7 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}$.

▶ **Λύση**: Έχω: $\varphi([0]_7) = [0]_{15}$

$$ord([1]_7) = 7 \xRightarrow{①} ord(\varphi([1]_7)) \mid ord([1]_7) = 7$$

$$\Longrightarrow \boxed{ord(\varphi([1]_7)) \in \{1, 7\}}.$$

• $\varphi([1]_7) \in \mathbb{Z}_{15} \xrightarrow{\text{Θ. Lagrange}} ord(\varphi([1]_7)) \mid |\mathbb{Z}_{15}| = 15$

$$\Rightarrow \boxed{ord(\varphi([1]_7)) = 1 \text{ ή } 3 \text{ ή } 5 \text{ ή } 15}$$

• Συνεπώς: $\boxed{ord(\varphi([1]_7)) = 1} \Longrightarrow \boxed{\varphi([\alpha]_7) = [0]_{15}}$

$, \forall [\alpha] \in \mathbb{Z}_7$

▸ **Άσκηση**: Έστω G_1, G_2 ομάδες. Είναι η G_1 ισόμορφη της G_2, με $G_1 = (\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}^+, \cdot) = G_2$;

• **Λύση**. $f(x) = e^x$

• Προφανώς: $f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y)$

• Προφανώς είναι "1-1" και επί, ως εκθετική!

• Άρα f: ισομορφισμός

▸ **Άσκηση**: Είναι οι $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ ισόμορφη με την S_4 ;

— " — $(\mathbb{Z}, +)$ — " — $(\mathbb{R}, +)$;

— " — $\mathbb{Z}_6$, — " — S_3 ;

— " — $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ — " — $\mathbb{Z}_8$;

• **Λύση** (i) Έχω ότι η $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ έχει τάξη:

$$|S_3 \times \mathbb{Z}_2| = |S_3| \cdot |\mathbb{Z}_2| = 12 \neq 24 = 4! = |S_4|$$

• Άρα, καθώς $|S_3 \times \mathbb{Z}_2| \neq |S_4|$, τότε $\nexists$ απεικόνιση "1-1" και επί, από το $S_3 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow S_4$

(ii) Γνωρίζουμε από την θεωρία αριθμών, ότι το $\mathbb{Z}$ έχει αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων, ενώ το $\mathbb{R}$ όχι!!!

· Άρα, ∄ "1-1" και επί απεικόνιση, από το

$$(\mathbb{Z},+) \xrightarrow{\;} (\mathbb{R},+)$$

(iii) Η $\mathbb{Z}_6$ δεν είναι ισόμορφη με την S_3, καθώς η $\mathbb{Z}_6$ είναι και κυκλική και αβελιανή, ενώ η S_3 δεν είναι ούτε κυκλική ούτε αβελιανή!!!

(iv) Η $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ δεν είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_8$, γιατί η $\mathbb{Z}_8$ είναι κυκλική, ενώ η $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ δεν είναι $(\underline{\text{Μ.Κ.Δ.}(2,4)} = 2 \neq 1)$

$$\Bigg[ord(g_1 \cdot g_2) = \text{Ε.Κ.Π.}\left[o(g_1), o(g_2)\right] = \text{Ε.Κ.Π.}\left[4,2\right] = 4 \neq 8 \Bigg]$$

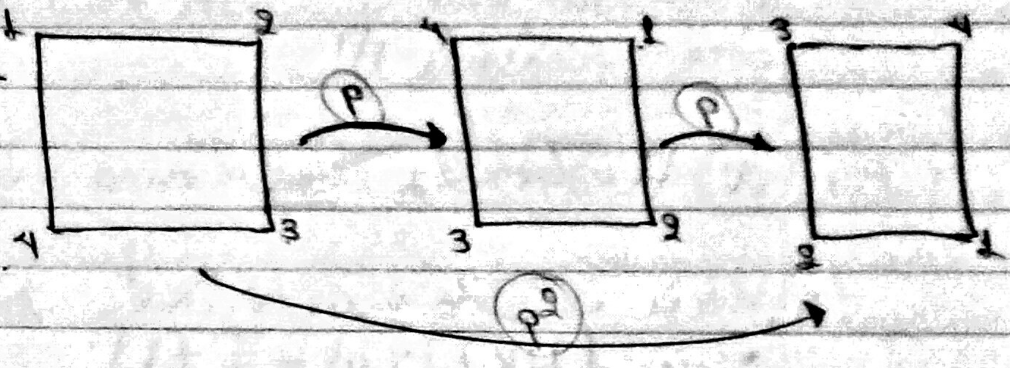
ΔΙΕΔΡΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ (ή ομάδες συμμετρίας κανονικών ν-γώνων).

- $D_\nu = \left\{ \begin{array}{l} 1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{\nu-1}, \\ \sigma, \underset{\rho^{\nu-1}\cdot\sigma}{\underset{\parallel}{\sigma\rho}}, \dots, \underset{\rho\cdot\sigma}{\underset{\parallel}{\sigma\rho^{\nu-1}}} \end{array} \right\}$ $\Rightarrow \rho^\nu = 1 \Rightarrow \boxed{ord(\rho)=\nu}$

  $\sigma^2 = 1 \Rightarrow \boxed{ord(\sigma)=2}$

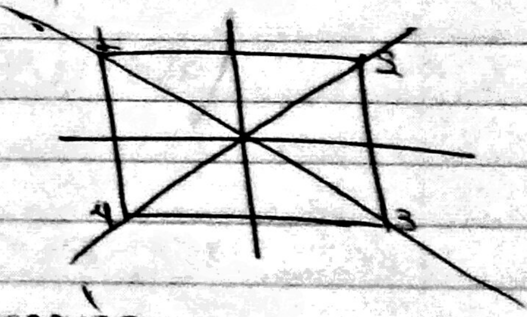
- $|D_\nu| = 2\nu$

$\to D_4 \longrightarrow$



- Πρακτικώς: $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$



⚠ 4 κατοπτρισμοί και 4 στροφές.

⚠ Πρακτικώς $ord(\sigma\rho^i) = 2$, διότι: $(\sigma\rho^i)(\sigma\rho^i) =$

$= \sigma\rho^i \cdot \rho^{\nu-i} \cdot \sigma = \sigma \cdot \sigma = \sigma^2 = 1 \Rightarrow \boxed{ord(\sigma\rho^i) = 2}$

⚠ Πρακτικώς: $D_\nu \leq S_\nu$ η Ομάδα μεταθέσεων

Άσκηση Βρείτε όλες τις υποομάδες της

$$D_4 = \left\{ \begin{matrix} 1, \rho, \rho^2, \rho^3, \\ \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \sigma\rho^3 \end{matrix} \right\}$$

Λύση: Έστω $H \leq D_4$. Από το Θ. Lagrange, έχουμε:

$$|H| \mid |D_4| \Rightarrow |H| \in \{1, 2, 4, 8\}$$

(i) $|H| = 1 \Rightarrow \boxed{H = \{1\}}$ ~ Τετριμμένη υποομάδα

(ii) $|H| = 8 \Rightarrow \boxed{H = D_4}$ ~ Μη-γνήσια

(iii) $|H| = 2 \Rightarrow \boxed{H = \{1, \alpha\}}$, με $\alpha \in D_4$, τ.ω: $o(\alpha) = 2$.

$$\Rightarrow \alpha \in \{\sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \sigma\rho^3, \rho^2\}$$

(iv) • $|H| = 4$ και H: κυκλική $\Rightarrow$

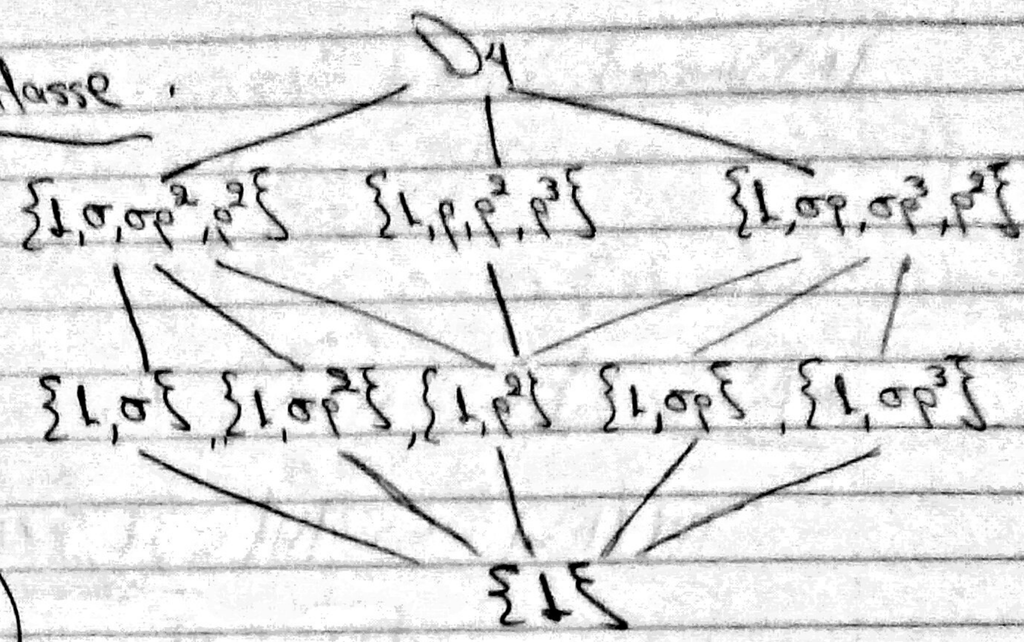
$\Rightarrow H = \langle \rho \rangle = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3\} = \langle \rho^3 \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$

• $|H| = 4$ και H: μη κυκλική $\Rightarrow$

$\Rightarrow H = \{1, \sigma, \sigma\rho^2, \rho^2\} \simeq V_4$ ~ Ομάδα του Klein

(v) $H = \{1, \sigma\rho, \sigma\rho^3, \rho^2\} \simeq V_4$

• Διάγραμμα Hasse :



▶ **Θεώρημα Cayley** [Κάθε ομάδα είναι ισόμορφη με μία <u>υποομάδα</u> κάποιας ομάδας μεταθέσεων.

▶ <u>Απόδειξη</u> : • Έστω G ομάδα και S_G η ομάδα μεταθέσεων του G. <u>Τότε</u>:

$$S_G = \{ f \mid f: G \to G,\ f: 1\text{-}1 \ \underline{\text{και}}\ f: \text{επί} \}$$

• <u>Έστω</u> $\alpha \in G$. <u>Θεωρώ</u> την απεικόνιση $f_\alpha : G \to G$,

, με $\boxed{f_\alpha(g) = \alpha \cdot g}$

• <u>Έχω</u> $f_\alpha(x) = f_\alpha(y) \Rightarrow \alpha \cdot x = \alpha \cdot y \xrightarrow[\text{διαγραφής}]{\text{νόμος}} x = y$

$$\Rightarrow f_\alpha : 1\text{-}1$$

• Έχω: $f(\alpha^{-1}\cdot x) = \alpha\cdot\alpha^{-1}\cdot x = e_G\cdot x = x \in G$

$\Rightarrow$ f_α: επί

• Συνεπώς: $\boxed{f_\alpha \text{: μετάθεση}}$

• Έστω: $G' = \{f_\alpha \mid \alpha \in G\} \subseteq S_G$

→ Για $e_G \in G$, έχω: $f_{e_G} \in G'$ $\Rightarrow$ $\boxed{G' \neq \emptyset}$

→ Έστω $f_\alpha, f_b \in G'$. Ν.δ.ο.: $f_\alpha \circ f_b \in G'$.

• Έχω: $f_\alpha \circ f_b(x) = f_\alpha(f_b(x)) = f_\alpha(b\cdot x) = \alpha\cdot b\cdot x$

$= f_{\alpha b}(x) \in G'$

→ Έστω $f_\alpha \in G'$

• Τότε: $f_\alpha(x) = \alpha\cdot x = y \iff \boxed{x = \alpha^{-1}\cdot y}$

• Άρα: $f_\alpha^{-1}(y) = x = \alpha^{-1}\cdot y \Rightarrow f_\alpha^{-1}(y) = f_{\alpha^{-1}}(y) \in G'$

• Άρα $\boxed{G' \leq S_G}$ (G' υποομάδα της S_G)

• Θεωρώ την απεικόνιση $\varphi : G \longrightarrow G'$, τ/ω

$$\boxed{\varphi(\alpha) = f_\alpha}.$$

→ Έστω: $\varphi(\alpha) = \varphi(b) \Rightarrow f_\alpha = f_b \Rightarrow f_\alpha(x) = f_b(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha x = b x \Rightarrow \boxed{\alpha = b} \Rightarrow \boxed{\varphi : \text{"1-1"}}$

→ Έστω $h \in G' = \{ f_\alpha \mid \alpha \in G \} \Rightarrow h = f_\alpha = \varphi(\alpha)$

$\Rightarrow \boxed{\varphi : \text{επί}}$

→ Έστω $\alpha, b \in G$.

Έχω: $\varphi(\alpha b) = f_{\alpha b}$

Και: $\varphi(\alpha) \circ \varphi(b) = f_\alpha \circ f_b$

$\Bigg\}\ \boxed{f_{\alpha b} = f_\alpha \circ f_b}$ (Αποδείχθη στο πρίν)

• Άρα φ: ισομορφισμός

• Άρα κάθε ομάδα, είναι ισόμορφη με μία υποομάδα, κάποιας ομάδας μεταθέσεων!!!